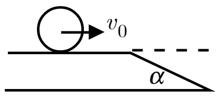
v adalah kecepatan bola A: $v = \omega r$.
ω adalah kecepatan sudut bola A terhadap sumbunya (sebenarnya v dapat juga ditulis sebagai $v = {}^{d\theta}\!/_{dt}\,(R + r)$, tetapi hubungan ini tidak akan kita gunakan).
Hukum kekekalan energi,

$$mg(R + r) = mg(R + r)\cos\theta + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Dengan menggunakan $I = \tfrac{2}{5}mr^2$, dan menyelesaikan persamaan-persamaan di atas, kita akan peroleh:

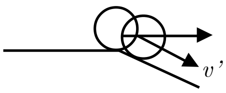
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{10g\,(R+r)}{17r^2}}}$$

1.151. *Sebuah silinder pejal homogen berjari-jari R menggelinding tanpa slip pada suatu bidang datar yang dihubungkan dengan suatu bidang miring dengan sudut miring α. Hitung kecepatan maksimum selinder agar selinder dapat menuju bidang miring tanpa melompat!*



Jawab: Kekekalan energi:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + mgR = \tfrac{1}{2}mv'^2 + \tfrac{1}{2}I\omega'^2 + mgR\cos\alpha$$



Karena silinder menggelinding tanpa tergelincir, maka $v_0 = R\omega$ dan $v' = R\omega'$.
Sekarang perhatikan gerak melingkar selinder ketika sedang berbelok ke bidang miring.

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv'^2}{R}$$

Selinder tidak akan meloncat selama $N \geqslant 0$.

$$mg\cos\alpha \geqslant \frac{mv'^2}{R}$$

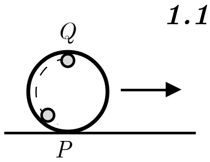
Selanjutnya dari persamaan-persamaan yang ada akan kita peroleh:

$$v_0 \leqslant \sqrt{\tfrac{1}{3}gR\,(7\cos\alpha - 4)}$$

atau

$$\boxed{v_{0max} = \sqrt{\tfrac{1}{3}gR\,(7\cos\alpha - 4)}}$$

1.152. *Sebuah hoop (cincin) berjari-jari R menggelinding di atas bidang datar tanpa slip. Di dalam hoop itu terdapat sebuah benda A. Ketika benda A berada pada posisi terendah, kecepatan pusat massa hoop v_0. Berapakah nilai v_0 agar hoop tidak melompat-lompat? Anggap massa hoop sama dengan massa benda A.*



Jawab: Pada posisi terendah (titik P) energi total sistem:

$$\begin{aligned} E_P &= (E_k + E_P)_{benda} + (E_k + E_P)_{hoop} \\ &= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + mgR \end{aligned}$$

Note: energi kinetik benda A pada posisi ini adalah nol karena kecepatan di titik ini $v_0 - \omega_0 R = 0$ (hoop bergerak tanpa slip sehingga $v_0 = \omega_0 R$).

Di titik tertinggi (Q):

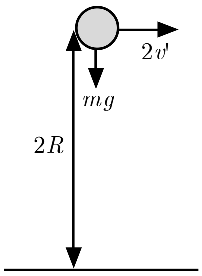
$$E_Q = (E_k + E_P)_{benda} + (E_k + E_P)_{hoop}$$

$$= \tfrac{1}{2} m v'^2_b + mg2R + \tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} I\omega'^2 + mgR$$

dengan $v'_b = v' + R\omega' = 2\omega' R$ (kecepatan benda A di titik Q).

Selanjutnya karena $E_P = E_Q$, kita akan peroleh

$$v_0^2 = 3v'^2 + 2gR$$

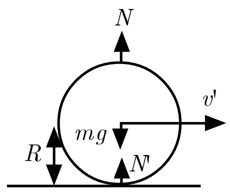


Di titik tertinggi: benda A dapat dianggap sesaat bergerak melingkar dengan jari-jari $2R$ dengan pusat lingkaran di titik P.

$$N + mg = m\frac{v_Q^2}{(2R)}$$

atau

$$N + mg = \frac{2mv'^2}{R}$$



Pada saat benda A di titik tertinggi, pusat massa hoop dapat dianggap bergerak melingkar dengan jari-jari R.

$$N + N' - mg = \frac{mv'^2}{R}$$

Hoop akan bergerak tanpa melompat jika $N' \geqslant 0$.

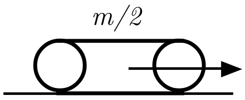
Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$v_0^2 - 2gR \leqslant 6gR$$

atau

$$\boxed{v_0 \leqslant \sqrt{8gR}}$$

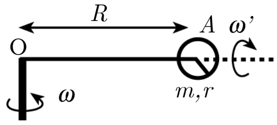
1.153. *Tentukan energi kinetik ban berjalan suatu traktor bermassa m bila traktor bergerak dengan kecepatan v! Massa bagian atas m/2 dan massa bagian bawah m/2.*



Jawab: Karena roda traktor berputar tanpa slip dengan kecepatan v, maka kecepatan bagian atas ban $2v$ dan kecepatan pada bagian bawah nol. Jadi energi kinetik ban adalah:

$$\boxed{E_k = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{m}{2}\right)(2v)^2 + 0 = mv^2}$$

1.154. *Sebuah bola pejal bermassa m dan jari-jari r berotasi tanpa slip terhadap suatu sumbu mendatar OA. Dalam proses ini pusat massa bola bergerak dengan kecepatan v sepanjang suatu lingkaran berjari-jari R. Hitung energi kinetik bola!*



Jawab: Disini ada dua gerak rotasi: gerak rotasi bola terhadap sumbu OA (dengan kecepatan sudut ω') dan gerak rotasi pusat massa bola terhadap sumbu vertikal yang melalui O (dengan kecepatan sudut ω).

Karena bola berotasi tanpa slip maka $v = \omega R = \omega' r$.

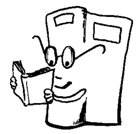
Energi kinetik Bola:

$$E_k = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + \tfrac{1}{2} I'\omega'^2$$

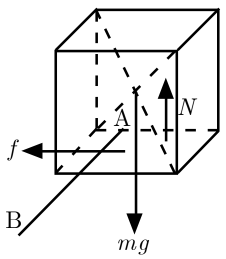
dalam hal ini: $I' = \tfrac{2}{5} mr^2$ dan $I = I' + mR^2$.

dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{E_k = \tfrac{7}{10} mv^2\left(1 + \frac{2r^2}{7R^2}\right)}$$



1.155. *Suatu kubus homogen bersisi a bergerak dalam bidang datar yang kasar. Balok kemudian berhenti setelah menempuh jarak tertentu. Koefisien gesekan balok dengan bidang datar μ. Jelaskan hilangnya momentum sudut kubus relatif terhadap sumbu yang tegak lurus gerakan kubus dan terletak pada alas kubus! Tentukan jarak antara titik tangkap gaya gravitasi dan gaya Normal!*



Jawab: Perhatikan gambar dibawah! Momentum sudut terhadap garis AB adalah $mv(\tfrac{1}{2}a)$. Karena v berkurang akibat *gesekan* maka momentum sudut ini akan berkurang juga. Ketika v menjadi 0 momentum sudutnya juga nol.

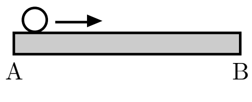
Selama gerakan, balok tidak terputar. Hal ini disebabkan karena torsi akibat gaya gesekan dikalahkan oleh torsi akibat gaya Normal (titik tangkap gaya normal tidak terletak segaris lagi dengan gaya gravitasi).

Jika jarak kedua titik tangkap ini adalah x, maka torsi terhadap titik O:

$$Nx - \left(\tfrac{1}{2}a\right)f$$

Karena $f = \mu N$, maka: $\boxed{x = \tfrac{1}{2}\mu a.}$

1.156. *Sebuah batang AB yang massanya M dan panjangnya l berputar bebas terhadap suatu sumbu vertikal yang melalui A dengan kecepatan sudut ω_0 dalam bidang datar. Sebuah benda kecil bermassa m bergerak sepanjang batang dari titik A. Hitung kecepatan benda v' relatif terhadap batang pada saat benda mencapai ujung B!*



Jawab: Karena tidak ada gaya luar yang bekerja pada sistem maka momentum sistem kekal.

Kekekalan momentum sudut:

$$I\omega_0 = (I + ml^2)\omega$$

Kekekalan energi:

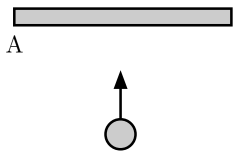
$$\tfrac{1}{2} I\omega_0^2 = \tfrac{1}{2}(I + ml^2)\omega^2 + \tfrac{1}{2} mv'^2$$

Momen inersia batang: $I = \tfrac{1}{3} Ml^2$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{v' = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{1 + \dfrac{3m}{M}}}}$$

1.157. *Sebuah pelat (keping) bujursangkar homogen dengan sisi l dan massa M dapat berputar bebas terhadap sumbu vertikal yang melalui salah satu sisi pelat. Sebuah bola kecil bermassa m bergerak dengan kecepatan v tegak lurus pelat membentur pusat massa pelat secara elastik. Hitung:*
(a) kecepatan bola v' setelah tumbukan;
(b) gaya resultan yang diterima oleh pelat (arah horizontal)!



Jawab:

(a) Kekekalan momentum sudut (terhadap sisi A):

$$mv\left(\tfrac{l}{2}\right) = mv'\left(\tfrac{l}{2}\right) + I\omega$$

Kekekalan energi kinetik (tumbukannya elastik)

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

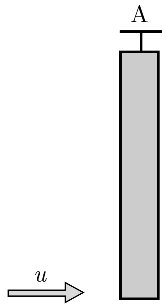
Dari persamaan di atas kita peroleh: $(I = \tfrac{1}{3} Ml^2)$

$$v' = \frac{3m - 4M}{(3m + 4M)} v$$

(b) Setelah tumbukan, pelat berputar dengan gaya sentripetal. Dan gaya inilah yang ditanyakan.

Jadi, gaya pada pelat: $F = \dfrac{M\omega^2 l}{2}$

atau, $$\boxed{F = \frac{8Mv^2}{l\left(1 + \dfrac{4M}{3m}\right)^2}}$$



1.158. *Sebuah batang bermassa M dan panjangnya l digantungkan pada titik A. Sebutir peluru bermassa m menumbuk ujung batang bawah, sehingga batang berayun sebesar* θ*. Anggap* $m \ll M$*, tentukan:*

(a) kecepatan peluru!

(b) perubahan momentum sistem; apa yang menyebabkan perubahan momentum ini?

(c) pada jarak berapakah dari titik A, peluru harus menumbuk batang agar momentum sistem kekal?

Jawab:

(a) Anggap setelah tumbukan peluru masuk dalam batang dan sistem (batang + peluru) berayun dengan kecepatan sudut ω.

Kekekalan momentum sudut:

$$mul = I\omega$$

dengan

$$I = \left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)$$

Ketika sistem mencapai sudut θ, energi kinetik yang diterima peluru telah diubah menjadi energi potensial.

$$E_P = E_k$$

$$Mg\,{}^{l}\!/_{2}\,(1 - \cos\theta) + mgl(1 - \cos\theta) = {}^{1}\!/_{2}\, I\omega^2$$

Dari persamaan tersebut kita peroleh:

$$\left({}^{M}\!/_{2} + m\right) gl\left(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = {}^{1}\!/_{2}\,\frac{m^2u^2}{\left({}^{M}\!/_{3} + m\right)}$$

$$u \approx {}^{M}\!/_{m}\,\sin\left({}^{\theta}\!/_{2}\right)\sqrt{{}^{2}\!/_{3}\,gl}$$

(b) Momentum linear sistem setelah tumbukan:

$$P' = \left({}^{M}\!/_{2} + m\right)\frac{mu}{{}^{M}\!/_{3} + m}$$

Karena $M \gg m$, maka

$$P' = \frac{3mu}{2}$$

Perubahan momentum linear sistem:

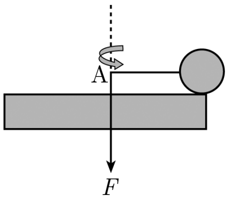
$$\Delta P = P' - P$$

atau

$$\Delta P = M\sin\left({}^{\theta}\!/_{2}\right)\sqrt{{}^{1}\!/_{6}\,gl}$$

(c) Untuk $\Delta P = 0$, maka peluru harus menumbuk batang pada jarak $x = {}^{2l}\!/_{3}$ (silahkan buktikan!)

1.159. *Sebuah cakram homogen bermassa M dan berjari-jari R terletak pada bidang datar. Sebuah benda massa m diletakkan di sisi cakram. Benda dihubungkan dengan seutas tali yang dilewatkan ke lubang A dipusat massa cakram. Sistem mula-mula berputar dengan kecepatan sudut* ω_0*, kemudian gaya F diberikan pada ujung tali sehingga benda perlahan-lahan bergerak menuju pusat massa cakram. Abaikan gesekan, hitung:*



(a) kecepatan sudut sistem ketika benda telah mencapai lubang A!

(b) usaha yang dilakukan F!

Jawab:

(a) Gaya yang bekerja arahnya ke arah pusat (dalam hal ini tidak ada torsi yang bekerja), sehingga momentum sudut kekal:

$$(I_1 + I_2)\omega_0 = I_1\omega$$

dimana $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$ dan $I_2 = mR^2$ menyatakan momen inersia cakram dan benda.

Dari persamaan di atas kita peroleh:

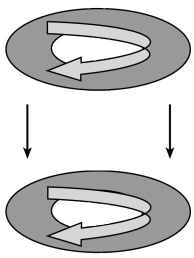
$$\boxed{\omega = \left(\frac{M + 2m}{M}\right)\omega_0}$$

(b) Usaha yang dilakukan oleh gaya F sama dengan perubahan energi kinetik sistem:

$$W = \tfrac{1}{2} I_1\omega^2 - \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega_0^2$$

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2}\, m\omega_0^2\, R^2\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

1.160. *Dua cakram (disk) berotasi masing masing terhadap sumbunya. Momen inersia kedua disk relatif terhadap sumbu ini* I_1 *dan* I_2*, dan kecepatan sudutnya* ω_1 *dan* ω_2*. Disk 1 kemudian dijatuhkan ke disk 2, selanjutnya kedua disk berputar bersama (akibat gesekan). Tentukan:*



(a) kecepatan sudut disk setelah stabil;

(b) usaha yang dilakukan oleh gaya gesek!

Jawab:

(a) Momentum sudut kekal (karena tidak ada torsi luar)

$$(I_1 + I_2)\omega = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$$

atau

$$\boxed{\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}}$$

(b) Usaha yang dilakukan gaya gesekan adalah perubahan energi kinetik. Jadi,

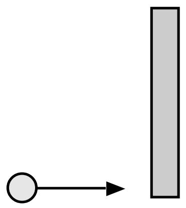
$$W_{gesekan} = E_k' - E_k$$

$$W_f = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 - \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \tfrac{1}{2} I_1 \omega_2^2$$

atau

$$\boxed{W_f = -\tfrac{1}{2}\,\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2}$$

1.161. *Pada sebuah bidang datar terdapat sebuah disk kecil (massa m) dan sebuah batang homogen panjang l (massa M). Disk bergerak tegak lurus batang dan menumbuk ujung batang secara elastik dengan kecepatan v. Tentukan kecepatan disk dan kecepatan sudut batang setelah tumbukan jika M =* η*m! Berapa nilai* η *agar kecepatan disk setelah tumbukan sama dengan nol? Bagaimana agar disk berbalik arah!*



Jawab: Dalam sistem ini karena batang bebas maka *momentum linear kekal* (bandingkan dengan soal 1.159 dimana batang dipaksa berputar).

$$mv = mv' + MV$$

dimana v' dan V adalah kecepatan bola dan batang setelah tumbukan.

Kekekalan momentum sudut (terhadap pusat massa):

$$mv\,\tfrac{l}{2} = mv'\,\tfrac{l}{2} + I\omega$$

dengan $I = \dfrac{Ml^2}{12}$

Kekekalan energi:

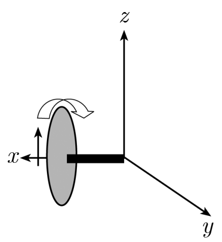
$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} MV^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

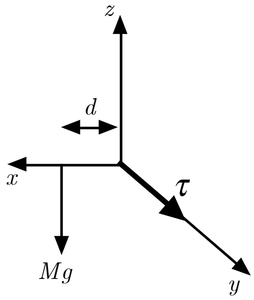
Dari persamaan–persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{\begin{aligned} v' &= \frac{v(4-\eta)}{(4+\eta)} \\ \omega &= \frac{12v}{l(4+\eta)} \end{aligned}}$$

Disk akan berhenti bila: $v' = 0$,
dari persamaan di atas kita peroleh: $\eta = 4$.
Disk akan berbalik arahnya bila v' negatif, yaitu, $\eta > 4$.

1.162. *Sebuah roda sepeda dihubungkan dengan sebuah as yang disambungkan dengan sebuah batang yang mudah berputar (lihat gambar). Roda sepeda kemudian diputar terhadap porosnya (sumbu x) dengan kecepatan sudut* ω_0*. Terjadi suatu keanehan, yaitu roda sekarang berputar juga terhadap sumbu z. Hitung kecepatan sudut roda tersebut terhadap sumbu z! Anggap jari-jari roda R dan massa roda M. Momen inersia roda I. Jarak pusat massa roda dengan sumbu z adalah d.*





Jawab: Gaya berat roda mengakibatkan torsi yang arahnya arah sumbu y (gunakan aturan tangan kanan).

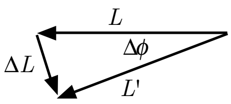
Adanya torsi ini mengakibatkan terjadi perubahan momentum sudut, semula arah momentum sudut pada sumbu x, sekarang menyimpang sedikit menuju arah sumbu y.

Besar perubahan momentum sudut (lihat gambar)

$$\Delta L = L\Delta\phi \text{ (anggap } L = L'\text{)}$$

Karena $\tau = {}^{\Delta L}\!/\!_{\Delta t}$ maka,

$$\tau = L\left({}^{\Delta\phi}\!/\!_{\Delta t}\right) = L\omega_P$$

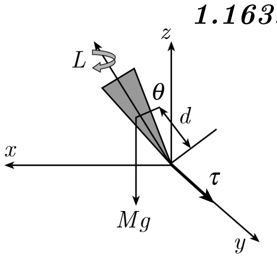


ω_P adalah kecepatan sudut terhadap sumbu z. Jadi:

$$\omega_P = {}^{\tau}\!/\!_{L} = \frac{Mgd}{I\omega_0}$$

Catatan: Gerak roda berotasi terhadap sumbu z ini dinamakan gerak presesi. ω_P dinamakan kecepatan sudut presesi.

1.163. *Sebuah gasing berputar terhadap suatu sumbu yang membentuk sudut θ dengan sumbu z. Hitung kecepatan sudut presesi gasing jika massa gasing M, jarak pusat massa gasing dengan pusat koordinat d kecepatan sudut gasing ω dan momen inersia gasing terhadap sumbunya I!*

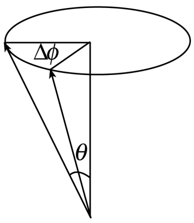


Jawab:

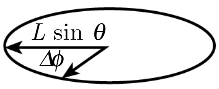
Gaya berat gasing menyebabkan timbulnya torsi pada arah sumbu y. Torsi ini akan menyebabkan terjadinya perubahan momentum sudut.

Besarnya perubahan momentum sudut adalah: $\Delta L = L \sin\theta\, \Delta\phi$.

Karena torsi adalah laju perubahan momentum sudut maka:

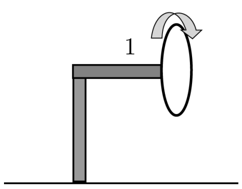


$$\tau = \left({}^{\Delta L}\!/\!_{\Delta t}\right) = L \sin\theta\left({}^{\Delta\phi}\!/\!_{\Delta t}\right)$$



Jadi: $\boxed{\omega_P = \dfrac{\tau}{L\sin\theta} = \dfrac{Mgd}{I\omega}}$

1.164. *Sebuah giroskop, berupa disk homogen berjari-jari R berada pada ujung batang yang panjangnya l yang dihubungkan dengan batang vertikal. Keseluruhan sistem diletakkan didalam sebuah lift yang sedang bergerak ke atas dengan percepatan konstan a_0. Giroskop berputar dengan kecepatan sudut ω. Abaikan gesekan dan massa batang, hitung kecepatan sudut presesi dari giroskop ini!*



Jawab: Soal ini mirip dengan soal no. 162 hanya saja percepatan gravitasinya diganti dari g menjadi $g + a_0$ (silahkan diskusikan, mengapa begitu)

Kecepatan sudut presesinya adalah:

$$\boxed{\omega_P = \frac{2\,(g + a_0)\,l}{\omega R^2}}$$

note: gunakan $I = \frac{1}{2} MR^2$

1.165. *Sebuah gasing dengan massa m dan momen inersia I (terhadap sumbunya) berotasi dengan kecepatan sudut* $\boldsymbol{\omega}$ *terhadap sumbunya. Ujung bawahnya diletakkan pada sebuah balok yang bergerak mendatar dengan percepatan* a_0*. Jarak antara ujung bawah ke pusat massa d. Hitung kecepatan sudut presesinya!*

Jawab: Soal ini mirip dengan soal 1.163 hanya saja percepatan gravitasinya diganti dari g menjadi $\left(g^2 + a_0^2\right)^{1/2}$ (silahkan diskusikan ini!).

Jadi kecepatan sudutnya adalah:

$$\boxed{\omega_P = \frac{m\left(g^2 + a_0^2\right)^{1/2} d}{I\omega}}$$