1.109. *Anggap kita membuat suatu model sistem tata surya dengan perbandingan skala η. Anggap kerapatan material planet dan matahari tidak berubah. Apakah perioda revolusi planet ikut berubah?*

Jawab: Menurut hukum Keppler (lihat soal 105) perioda planet adalah:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3 = \left(\frac{4\pi^2}{G}\left(\frac{3}{4\pi R^3\rho}\right)\right)a^3$$

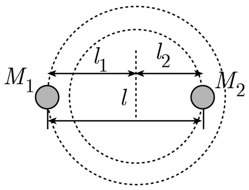
$$= \frac{3\pi a^3}{\left(G\rho R^3\right)}$$

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{R'}\right)^{3/2} = \left(\frac{\eta a}{a}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{\eta R}\right)^{3/2}$$

$$= \boxed{1}$$

dengan kata lain periodanya tidak berubah.

1.110. *Sebuah sistem bintang kembar terdiri dari dua bintang yang bergerak mengelilingi pusat massa sistem akibat gaya gravitasi. Hitung jarak antara kedua bintang dalam sistem ini jika massa total sistem M dan periode revolusi bintang T!*



Jawab: Menurut rumus pusat massa:

$$M_2 l_2 = M_1 l_1$$

Dari gambar terlihat bahwa:

$$l_1 + l_2 = l$$

Dari kedua persamaan itu kita peroleh,

$$l_1 = \frac{M_2 l}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 l}{M}$$

Gaya tarik antara kedua bintang:

$$F_1 = G\frac{M_1 M_2}{l^2}$$

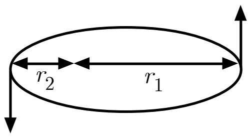
Karena gaya F_1 ini memberikan gaya sentripetal pada planet M_1, maka

$$M_1 \omega^2 l_1 = \frac{GM_1 M_2}{l^2}$$

Karena $\omega = {}^{2\pi}\!/_{T}$, maka kita akan peroleh,

$$\boxed{l = \left[GM\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3}}$$

1.111. *Sebuah planet bermassa m bergerak mengitari matahari bermassa M sepanjang lintasan elips sedemikian sehingga jarak maksimum dan minimum dari matahari adalah r_1 dan r_2. Hitung momentum sudut $\vec{L}$ planet relatif terhadap pusat Matahari!*



Jawab: Kekekalan momentum sudut (perhatikan bahwa r dan v tegak lurus di titik terjauh dan di titik terdekat):

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$

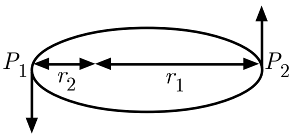
Kekekalan energi:

$$-G\frac{mM}{r_1} + \tfrac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{GmM}{r_2} + \tfrac{1}{2} m v_2^2$$

Selesaikan kedua persamaan di atas, kita akan memperoleh:

$$\boxed{L_1 = mv_1 r_1 = m\sqrt{2GM\left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)}}$$

1.112. *Buktikan bahwa energi mekanis total planet bermassa m yang bergerak mengelilingi Matahari sepanjang lintasan elips tergantung hanya pada sumbu semi-mayor ellips a!*



Jawab: Anggap jarak minimum dan maksimum planet terhadap matahari adalah r_1 dan r_2.

Dari hukum Newton $F = ma$ kita peroleh,

$$\frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{GMm}{r_1^2}$$

Energi total partikel pada posisi P_1 adalah:

$$E = \tfrac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1}$$

Dengan cara yang sama, energi pada posisi P_2 adalah:

$$E = -\frac{GMm}{2r_2}$$

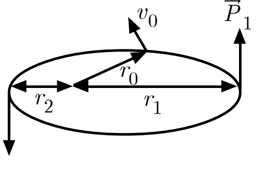
Dari persamaan diatas kita peroleh,

$$2E\,(r_1 + r_2) = -2GMm$$
$$E\,2a = -GMm$$

atau

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

1.113. *Sebuah planet A bergerak sepanjang lintasan ellips mengelilingi Matahari. Ketika planet berada di titik O pada jarak $\vec{r}_0$ dari Matahari, kecepatannya $\vec{v}_0$. Sudut antara vektor $\vec{r}_0$ dan $\vec{v}_0$ adalah α. Tentukan jarak maksimum dan minimum planet dari Matahari!*



Jawab: Momentum sudut dititik terjauh:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1$$

atau,

$$L_i = r_1 m v_1 \sin 90^{\circ} = mv_1 r_1$$

Momentum sudut di titik O:

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{P}_0$$

atau,

$$L_0 = r_0 m v_0 \sin \alpha$$

Kekekalan momentum sudut:

$$m v_1 r_1 = m v_0 r_0 \sin \alpha$$

Kekekalan energi:

$$-\frac{GMm}{r_0} + \tfrac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{GMm}{r_1} + \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

Dari persamaan di atas kita peroleh,

$$-\frac{GMm}{r_0} + \tfrac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{GMm}{r_1} + \tfrac{1}{2} m \left(\frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{r_1}\right)^2$$

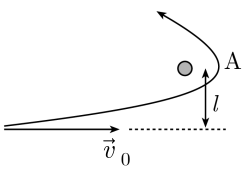
Persamaan ini adalah persamaan kuadratik dalam r_1 yang dapat diselesaikan dan menghasilkan (pakai rumus *abc*):

$$\boxed{r_1 = \frac{r_0}{2-\eta}\left[1 \pm \sqrt{1-(2-\eta)\eta \sin^2 \alpha}\right]}$$

dimana, $\eta = \dfrac{r_0 v_0^2}{GM}$.

Tanda negatif memberikan jarak minimum dan tanda positif memberikan jarak maksimum.

1.114. *Sebuah benda kosmik A bergerak dari tempat jauh menuju Matahari dengan kecepatan v_0. Parameter impaknya adalah l (lihat gambar). Tentukan jarak minimum benda dari Matahari!*



Jawab: Misalkan titik terdekat dari matahari adalah titik A. Disini arah kecepatan dan arah vektor jari-jari tegak lurus.

Kekekalan momentum sudut terhadap matahari:

$$m v_0 l = m v r_{min}$$

Kekekalan energi

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r_{\min}}$$

Dari kedua persamaan diatas kita akan peroleh,

$$v_0^2 r_{\min}^2 + 2GMr_{\min} - l^2 v_0^2 = 0$$

Selanjutnya, kita akan peroleh;

$$r_{\min} = \frac{-2GM \pm \sqrt{4G^2M^2 + 4v_0^4 l^2}}{2v_0^2}$$

(Di sini hanya tanda positif sebelum tanda akar kuadrat yang berlaku).

Jadi,

$$\boxed{r_{\min} = \frac{GM}{v_0^2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{v_0^2 l}{GM}\right)^2}-1\right]}$$

1.115. *Satelit-satelit Bumi bergerak mengelilingi bumi dalam suatu bidang edar. Anggap jari-jari lintasan dari suatu satelit adalah r = 7.000 km dan satelit lain berjari-jari Δr = 70 km lebih kecil. Hitung selang waktu terkecil kedua satelit itu melewati garis AB secara bersama-sama!*

Jawab:

Dari hukum Newton: $F = ma = m\omega^2 r$.

Kita akan peroleh:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{GM}{r'^3}}$$

Bila satelit-satelit bergerak dalam arah yang sama, maka kecepatan sudut relatif;

$$\begin{aligned}\omega - \omega' &= \sqrt{GM}\left(\frac{1}{r^{3/2}} - \frac{1}{r'^{3/2}}\right)\\ &= \sqrt{GM}\left[\frac{1}{r^{3/2}} - \left(\frac{1}{r-\Delta r}\right)^{3/2}\right]\end{aligned}$$

Dengan ekspansi binomial ($\Delta r \ll r$), kita peroleh:

$$\omega - \omega' = \sqrt{GM}\left[\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)\frac{3\Delta r}{2r}\right]$$

Jadi, mereka akan melewati garis AB secara periodik dalam waktu:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega - \omega'}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\frac{r^{3/2}}{3\Delta r/2r} = 4{,}5 \textit{ hari}$$

Bila satelit-satelit bergerak dalam arah berlawanan, maka kecepatan sudut relatifnya adalah:

$$\begin{aligned}\omega + \omega' &= \sqrt{GM}\left(\frac{1}{r^{3/2}} + \frac{1}{r'^{3/2}}\right)\\ &= \sqrt{GM}\left[\frac{1}{r^{3/2}} + \left(\frac{1}{r-\Delta r}\right)^{3/2}\right]\\ &= \sqrt{GM}\left[\frac{1}{r^{3/2}}\left(2 + \tfrac{3}{2}\frac{\Delta r}{r}\right)\right]\end{aligned}$$

(dengan ekspansi binomial).

Jadi waktu yang diperlukan adalah:

$$\Delta t' = \frac{2\pi}{\omega + \omega'}$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \frac{r^{3/2}}{3\Delta r/2r + 2} = 0{,}84 \; jam}$$

Hasil yang diminta adalah: **0,84 *jam*.**

1.116. *Hitung perbandingan dari percepatan-percepatan berikut:: a_1 percepatan akibat gaya gravitasi pada permukaan Bumi, a_2 percepatan sentripetal pada khatulistiwa Bumi, a_3 percepatan akibat gaya tarik Matahari pada benda di Bumi!*

Jawab: Percepatan akibat gravitasi pada permukaan Bumi adalah:

$$a_1 = \frac{GM_B}{R_B^2}$$

Percepatan sentripetal di khatulistiwa adalah: $a_2 = \omega^2 R_B$.

Percepatan yang disebabkan oleh gaya gravitasi Matahari pada benda di permukaan Bumi adalah:

$$a_3 = \frac{GM_M}{R_{B-M}^2}$$

dimana, $R_{B\text{-}M}$ adalah jari-jari lintasan Bumi mengitari Matahari.

Jadi,

$$\boxed{a_1 : a_2 : a_3 = \frac{GM_B}{R_B^2} : \omega^2 R_B : \frac{GM_M}{R_{B-M}^2}}$$

$$= \mathbf{1 : 0{,}0034 : 0{,}0006}$$

1.117. *Pada ketinggian berapa di atas permukaan Bumi (di daerah kutub) percepatan jatuh bebas akan berkurang satu persen? berkurang setengahnya?*

Jawab: Percepatan gravitasi pada ketinggian $r = R + h$ (dimana R adalah jari-jari bumi) adalah:

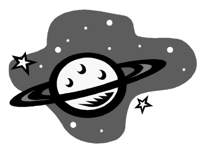
$$g' = \frac{GM}{r^2} = g(1 + h/R)^{-2}$$

g adalah percepatan gravitasi dipermukaan bumi ($r = R$).

Karena $g' = 0{,}99\ g$ maka kita peroleh:

$$h = 32\ Km\ (R = 6.400\ Km)$$

Jika $g' = g/2$, kita peroleh:



$$\boxed{h = 2.650\ Km}$$

1.118. *Pada kutub Bumi sebuah benda dilemparkan ke atas dengan kecepatan $\vec{v}_0$. Hitung ketinggian yang dicapai benda jika jari-jari Bumi R dan percepatan jatuh bebas pada permukaan Bumi g! Abaikan hambatan udara.*

Jawab: Di titik tertinggi kecepatan benda nol, sehingga dengan kekekalan energi kita peroleh:

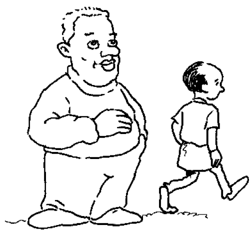
$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{(R+h)}$$

Selesaikan persamaan di atas, kita akan peroleh:

$$R/h = \frac{2GM}{Rv_0^2} - 1$$

Selanjutnya kita bisa tulis:

$$R/h = \frac{2gR}{v_0^2} - 1$$



Jadi; $\boxed{h = \dfrac{R}{\left(\dfrac{2gR}{v_0^2} - 1\right)}}$

1.119. *Hitung jari-jari lintasan suatu satelit geostasioner (satelit yang setiap saat berada di atas suatu titik yang sama pada permukaan bumi)! Hitung juga kecepatan dan percepatan satelit itu relatif terhadap Bumi!*

Jawab: Pada satelit geostationer, kecepatan sudut satelit sama dengan kecepatan rotasi bumi. Periodanya adalah $T = 24$ *jam.* Anggap r adalah jari-jari lintasan satelit dihitung dari pusat Bumi.

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3 = gR^2$$

Karena $g = \dfrac{GM}{R^2}$ dimana R adalah jari-jari Bumi.

Jadi,

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$r = \left(\frac{9,8\left(6,4\times10^6\right)^2 \times \left(8,64\times10^4\right)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\boxed{r = 4,2 \times 10^7 \text{ m}}$$

Percepatan satelit adalah percepatan sentripetal:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} = \frac{gR^2}{r^2} = \boxed{0,23 \text{ m/s}^2}$$

Dari sini kita dapat menghitung kecepatan satelit, yaitu:

$$v = \sqrt{0,23\times r} = \boxed{3,1 \text{ km/s}}$$

1.120. *Suatu satelit bergerak melingkar di atas khatulistiwa dengan jari-jari $r = 2{,}00 \times 10^4$ km. Satelit ini bergerak dari barat ke timur dan kelihatan di atas titik tertentu pada khatulistiwa setiap $t = 11{,}6$ jam. Dari data-data ini hitunglah massa Bumi!*

Jawab: Anggap ω_B adalah kecepatan sudut rotasi Bumi dan $\omega_{s\text{-}B}$ adalah kecepatan sudut satelit terhadap pengamat di Bumi. Jika ω_s adalah kecepatan sudut absolut, maka:

$$\omega_{s\text{-}B} = \omega_s - \omega_B$$

$$\omega_s = {}^{2\pi}\!/_{\tau} + {}^{2\pi}\!/_{T}$$

dimana, τ adalah periode satelit menurut pengamat di bumi dan T adalah periode rotasi Bumi.

Hukum Newton 2:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

atau,

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G}\left({}^{1}\!/_{\tau} + {}^{1}\!/_{T}\right)^2$$

$$M = \frac{4\pi^2 \times 2^3 \times 10^{21}}{6{,}67 \times 10^{-11}}\left(\frac{1}{11{,}6 \times 3.600} + \frac{1}{24 \times 3.600}\right)^2$$

$$= \boxed{\mathbf{6{,}0 \times 10^{24}\ kg}}$$

1.121. *Sebuah satelit bergerak dari timur ke barat dalam lintasan melingkar di atas khatulistiwa dengan jari-jari lintasan $R = 1{,}0 \times 10^4$ km. Hitung kecepatan satelit dalam kerangka tetap terhadap Bumi!*

***Jawab*:** Bila R adalah jari-jari lintasan satelit, maka dengan hukum Newton kita peroleh,

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

Bumi berputar dengan kecepatan sudut $\left({}^{2\pi}\!/_{T}\right)$ dalam arah barat ke timur dan satelit berputar dalam arah timur ke barat. Jadi, kecepatan satelit terhadap permukaan Bumi adalah:

$$v_{rel} = \left(v + \left({}^{2\pi}\!/_{T}\right)R\right) = \left(\sqrt{\frac{GM}{R}} + \frac{2\pi R}{T}\right)$$

$$v_{rel} = \boxed{7{,}0\ \text{km/s}}$$

1.122. *Sebuah satelit bergerak dibidang ekuator dekat dengan permukaan Bumi. Pada kasus A, satelit bergerak berlawanan dengan arah putaran Bumi sedangkan pada kasus B satelit berputar searah dengan arah putaran Bumi. Tentukan perbandingan energi kinetik satelit pada kedua kasus itu!*

Jawab: Anggap ω kecepatan sudut absolut satelit.

Dengan hukum Newton kita peroleh,

$$m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2}$$

Jika satelit dianggap dekat sekali dengan bumi maka $R = R_{bumi}$, sehingga kita boleh tuliskan:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_{bumi}}} = 1{,}24 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Pada kasus B, kecepatan satelit relatif terhadap bumi adalah:

$$\begin{aligned} \omega_{SB} &= \omega - \omega_B \\ &= (124 \times 10^{-5}) - (7{,}3 \times 10^{-5}) \\ &= 116{,}7 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Untuk kasus A:

$$\begin{aligned} \omega'_{SB} &= \omega + \omega_B \\ &= 131{,}3 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Perbandingan energi kinetik satelit:

$$\begin{aligned} \frac{E_B}{E_A} &= \frac{\frac{1}{2} m\omega'^2_{sB} r^2}{\frac{1}{2} m\omega^2_{sB} r^2} \\ &= \frac{(131{,}3)^2}{(116{,}7)^2} = \boxed{1{,}27} \end{aligned}$$

1.123. *Hitung kecepatan lolos (escaped velocity) di Bulan! Bandingkan dengan kecepatan lolos di Bumi.*

Jawab: Kecepatan lolos di Bulan merupakan kecepatan yang diberikan pada suatu benda di permukaan Bulan agar benda itu tidak kembali ke permukaan Bulan.

Anggap benda mencapai r tak hingga dan kecepatan di tempat tak hingga adalah nol. Dengan hukum kekekalan energi kita peroleh,

$$\frac{1}{2} m v_{lolos}^2 - \frac{GM_{bulan} m}{R_{bulan}} = 0$$

Dari persamaan ini kita peroleh,

$$v_{lolos} = 2{,}37 \ km/s$$

Perbandingannya dengan kecepatan lolos di Bumi:

$$\boxed{\frac{v_{lolos}}{v'_{lolos}} = \sqrt{\frac{M_{bulan} R_{bumi}}{M_{bumi} R_{bulan}}}}$$

1.124. *Sebuah pesawat luar angkasa mendekati Bulan sepanjang lintasan parabola yang hampir menyinggung permukaan Bulan. Pada saat pesawat mencapai jarak terdekat dengan Bulan, rem dihidupkan dalam selang waktu pendek. Selanjutnya pesawat mengorbit Bulan. Tentukan perubahan kecepatan pesawat luar angkasa selama proses pengereman ini!*

Jawab: Anggap kecepatan di titik yang jauh adalah nol.

Kekekalan energi:

$$-\frac{GM_b m}{R_b} + \tfrac{1}{2} mv^2 = 0$$

atau,

$$v = \sqrt{\frac{2GM_b}{R_b}}$$

Agar pesawat dapat mengorbit Bulan, pesawat harus mempunyai kecepatan tertentu (gunakan hukum Newton 2 pada orbit),

$$v' = \sqrt{\frac{GM_b}{R_b}}$$

Jadi, perubahan besar kecepatan pesawat adalah:

$$\Delta v = v' - v = \sqrt{\frac{GM_b}{R_b}} - \sqrt{\frac{2GM_b}{R_b}}$$

$$= \boxed{\textbf{-0,70 km/s}}$$

1.125. *Sebuah pesawat luar angkasa mengorbit dalam lintasan melingkar dekat permukaan Bumi. Berapa besar tambahan kecepatannya agar pesawat ini dapat mengalahkan gravitasi Bumi?*

Jawab: Kecepatan orbit satelit dekat permukaan Bumi adalah:

$$v_0 = \sqrt{gR_B}$$

Untuk mengatasi gravitasi Bumi, pesawat harus mempunyai kecepatan lolos.

$$v_{lolos} = \sqrt{2gR_B}$$

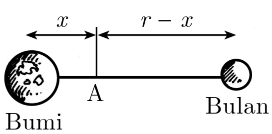
Jadi, tambahan kecepatan yang harus diberikan pada pesawat adalah:

$$\Delta v = v_B - v_0 = \sqrt{gR_B}\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$= \boxed{3{,}28 \text{ km/s}}$$

1.126. *Pada jarak berapakah dari pusat Bulan, kuat medan gravitasi Bumi dan Bulan sama dengan nol? Anggap massa Bumi η = 81 kali massa Bulan, dan jarak pusat Bumi-Bulan r = 60 kali jari-jari bumi R.*

Jawab: Anggap A adalah titik dimana resultan medan gravitasi nol.



$$\frac{GM_B}{x^2} - \frac{GM_b}{(r-x)^2} = 0$$

Selesaikan persamaan di atas, kita akan peroleh;

$$x = \frac{r}{\left(1+\sqrt{\frac{M_b}{M_B}}\right)}$$

Karena $\frac{M_b}{M_B} = \eta$ dan $r = 60\ R$, maka

$$\boxed{x = \frac{60R}{1+\sqrt{1/81}}}$$

Jadi, dengan memasukkan nilai-nilai, kita memperoleh $x = 54\ R$.

1.127. *Berapa usaha minimum yang harus dilakukan untuk membawa suatu pesawat luar angkasa bermassa $m = 2{,}0 \times 10^3$ kg dari permukaan Bumi ke permukaan Bulan?*

Jawab: Usaha minimum yang diperlukan adalah usaha yang dilakukan untuk melawan resultan gaya gravitasi Bumi dan Bulan. Usaha ini sama dengan beda energi potensial pesawat pada permukaan Bumi dan pada permukaan Bulan.

Energi potensial ketika pesawat dipermukaan Bumi adalah:

$$U_1 = -\frac{GM_B m}{R_B} - \frac{GM_b m}{r}$$

dimana, r adalah jari-jari orbit Bulan.

Energi potensial pesawat pada permukaan Bulan adalah:

$$U_2 = -\frac{GM_b m}{R_b} - \frac{GM_B m}{r}$$

Jadi, perubahan energi potensial pesawat

$$\Delta U = U_1 - U_2$$

$$\Delta U = -\frac{Gm}{r}(M_b - M_B) - Gm\left(\frac{M_B}{R_B} - \frac{M_b}{R_b}\right)$$

(r sangat besar dibandingkan dengan R_B dan R_b), atau

$$\Delta U = 1{,}3 \times 10^8 \text{ kJ}$$

1.128. *Tentukan kecepatan kosmik ketiga (third cosmic velocity) v_3, yaitu kecepatan minimum yang harus diberikan pada benda relatif terhadap permukaan Bumi untuk keluar dari sistem tata surya! Rotasi Bumi diabaikan.*

Jawab: v_3 tidak sama dengan kecepatan lolos. Di sini gravitasi matahari juga pegang peranan.

Anggap r adalah jarak Bumi-Matahari. Dengan hukum Newton kita peroleh kecepatan orbit bumi mengelilingi Matahari.

$$\frac{m_B v_{0M}^2}{r} = \frac{GMm_B}{r^2}$$

atau

$$v_{0M} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

dimana, M adalah massa Matahari. v_{0M} ini adalah kecepatan benda-benda yang mengorbit Matahari (artinya semua benda yang terletak pada jarak r dari Matahari, akan bisa mengorbit Matahari jika mempunyai kecepatan v_{0M}).

Kecepatan lolos benda yang berada diorbit Bumi untuk keluar dari medan gravitasi Matahari adalah (lihat soal sebelumnya tentang kecepatan lolos).

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}\, v_{0M}$$

v_l ini adalah kecepatan yang harus diberikan pada benda diam pada jarak r dari Matahari, agar mencapai titik tak hingga.

Jika benda yang sedang mengorbit Matahari (kecepatannya v_{0M}), hendak dilemparkan ke luar angkasa dan tak kembali lagi, maka kecepatan yang harus ditambahkan adalah:

$$v'_1 = \sqrt{2}\, v_{0M} - v_{0M}$$

Energi kinetik yang harus ditambahkan adalah $E_{kl} = \frac{1}{2} m v'_1$.

Ini artinya jika ada benda yang mempunyai energi E_{kl} dan benda ini mengorbit Matahari pada jarak r, maka dapat dipastikan bahwa benda itu akan lepas atau lolos dari cengkraman gravitasi tata surya.

Jadi jika ada suatu benda kosmik sedang bergerak dengan kecepatan v_3 di orbit Bumi (dekat dengan permukaan Bumi), maka benda ini akan lolos dari Matahari jika energinya sama dengan E_{kl} yaitu:

$$\frac{1}{2} m v_3^2 - \frac{G m_B m}{R_B} = \frac{1}{2} m(\sqrt{2} - 1)^2 v_{0M}^2$$

$$v_3^2 - 2 v_{0B}^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 v_{0M}^2$$

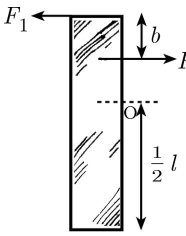
atau,

$$\boxed{v_3 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 v_{0M}^2 + 2 v_{0B}^2}}$$

Dimana kita definisikan: $v_{0B} = \sqrt{\frac{G m_B}{R_B}}$

(**catatan:** v_{0B} ini sebenarnya adalah kecepatan benda yang mengorbit Bumi).

1.129. *Sebuah batang tipis AB bermassa m = 1,0 kg mendapat gaya F_1 dan F_2 sehingga bergerak lurus dengan percepatan a = 2,0 m/s^2. Jarak antara kedua titik tangkap gaya ini adalah b = 20 cm. Jika F_2 = 5,0 N, tentukan panjang batang.*



Jawab: Batang akan bergerak lurus jika **torsi** (atau **torka** = **torque**) atau **momen gaya** terhadap pusat massanya (titik O) nol. Jika torsi tidak nol maka benda akan berotasi.

$$\tau = I\alpha = 0$$

$$F_1\left(l/2\right) - F_2\left(l/2 - b\right) = 0$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa F_2 lebih besar daripada F_1. Gunakan hukum Newton,

$$F_2 - F_1 = ma$$

Selesaikan kedua persamaan di atas, kita akan peroleh:

$$\boxed{l = \frac{2F_2 b}{ma}} = 1{,}0 \text{ m}$$

1.130. *Sebuah gaya $F = A\vec{i} + B\vec{j}$ bekerja pada suatu titik dengan vektor posisi $r = a\vec{i} + b\vec{j}$, dimana a, b, A, B adalah konstanta-konstanta, dan $\vec{i}$, $\vec{j}$ adalah vektor satuan dari sumbu x dan y. Hitung momen gaya terhadap titikO (pusat koordinat)! Hitung juga panjang lengan momen!*

Jawab:

Momen gaya:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= (a\vec{i} + b\vec{j}) \times (A\vec{i} + B\vec{j}) \\ &= (aB - bA)\vec{k}\end{aligned}$$

Lengan momen adalah: $l = \tau/F$

$$\boxed{l = \frac{aB - bA}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

1.131. *Sebuah gaya $F_1 = A\vec{j}$ bekerja pada suatu titik dengan vektor posisi $r_1 = a\vec{i}$. Sebuah gaya lain $F_2 = B\vec{i}$ bekerja pada titik dengan vektor posisi $r_2 = b\vec{j}$. Tentukan lengan momen $\vec{l}$ dari resultan gaya relatif terhadap tiik O (pusat koordinat)!*

Jawab:

Gaya total:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_1 \\ \vec{F} &= B\vec{i} + A\vec{j}\end{aligned}$$

Besar gaya; $F = \sqrt{A^2 + B^2}$

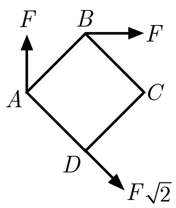
Momen gaya terhadap titik O:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ &= b\vec{j} \times B\vec{i} + a\vec{i} \times A\vec{j} \\ &= (aA - bB)\vec{k}\end{aligned}$$

Besar momen gaya: $\tau = aA - bB$

Lengan momen adalah: $l = \tau/F$

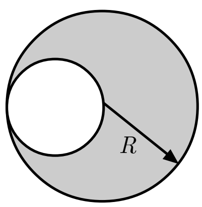
$$\boxed{l = \frac{aA - bB}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$



1.132. *Tiga gaya bekerja pada suatu persegi empat seperti ditunjukkan pada gambar. Hitung besar dan arah gaya resultannya!*

Jawab: Gaya pada titik sudut D dapat diurai yaitu menjadi: $F\vec{i} - F\vec{j}$. Karena gaya arah sumbu y saling menghapus maka yang ada hanya gaya arah sumbu x. Besar gaya ini adalah $2F$. Jadi besar gaya resultan adalah $2F$ dengan arah pada arah sumbu x.

1.133. *Sebuah cakram homogen berjari-jari R = 20 cm mempunyai lubang seperti tampak pada gambar. Massa cakram berlubang ini m = 7,3 kg. Hitung momen inersia cakram relatif terhadap sumbu yang melalui pusat massa cakram dan tegak lurus bidang cakram!*



Jawab: Dari gambar terlihat bahwa lubang pada cakram berjari-jari $R/2$. Jika kita punya benda sebesar lubang itu, maka momen inersia benda terhadap pusat benda adalah:

$$I_1 = \tfrac{1}{2} m'\left(\tfrac{R}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{8} m'R^2$$

Momen inersia terhadap titik O (pusat lingkaran/cakram besar) dapat dihitung dengan teori sumbu sejajar:

$$I_O = I_1 + m'\left(\tfrac{R}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{8} m'R^2$$

Untuk momen inersia lubang kita beri *tanda negatif.*

Sehingga momen inersia cakram berlubang adalah:

$$I = \tfrac{1}{2} MR^2 - I_O = \tfrac{1}{2} MR^2 - \tfrac{3}{8} m'R^2$$

M adalah massa cakram jika tidak berlubang.

Luas lubang $= \dfrac{\pi R^2}{4}$.

Luas bagian yang tak berlubang:

$$\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3\pi R^2}{4}$$

Jadi kerapatan cakram berlubang adalah:

$$\sigma = \frac{massa\ sisa}{3\pi R^2/4} = \frac{m}{3\pi R^2/4} = \frac{4m}{3\pi R^2}$$

Massa cakram yang dipotong (yang ditempati lubang):

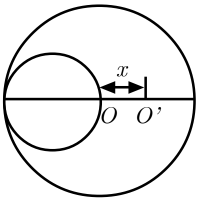
$$m' = \frac{\sigma\pi R^2}{4}$$

dan massa cakram jika tidak berlubang:

$$M = \sigma p R^2$$

Sehingga kita akan peroleh,

$$I = \frac{\sigma \pi R^4}{2}\left(1 - 3/16\right) = \left(13/24\right) mR^2$$



Sekarang kita cari pusat massa sistem. Dengan rumus pusat massa, kita peroleh:

$$m' R/2 = mx$$

Dengan memasukkan nilai m dan m' kita peroleh, $x = R/6$.

Dengan demikian momen inersia terhadap titik O' adalah (gunakan teori sumbu sejajar).

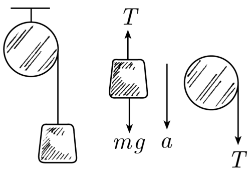
$$I = I_{O'} + m\left(R/6\right)^2$$

$$I_{O'} = \left(13/24\right) mR^2 - m\left(R/6\right)^2$$

$$= \left(37/72\right) mR^2$$

$$= \boxed{\mathbf{0{,}15\ kg.m^2}}$$

1.134. *Sebuah benda bermassa m tergantung pada seutas tali ringan yang dihubungkan dengan sebuah selinder pejal bermassa M dan berjari-jari R. Hitung sebagai fungsi waktu besarnya kecepatan sudut selinder dan energi kinetik seluruh sistem!*



Jawab:

Benda m (translasi):

$$mg - T = ma$$

Selinder (rotasi):

$$TR = I\alpha = 1/2\, MR^2\alpha$$

Karena selinder tidak slip maka $a = \alpha$R.

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\alpha = \left(\frac{2mg}{2m + M}\right)\frac{1}{R}$$

Kecepatan sudut silinder setelah waktu t:

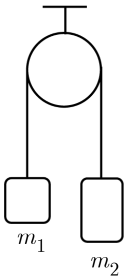
$$\omega = \alpha t = \frac{2mgt}{(2m + M)R}$$

kecepatan linier massa m adalah

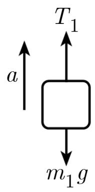
$$v = at = \frac{2mgt}{2m + M}$$

$$E_{k(total)} = E_{k(selinder)} + E_{k(benda)}$$
$$= \tfrac{1}{2} I\omega^2 + \tfrac{1}{2} mv^2$$
$$= \tfrac{1}{4} M\left[\frac{2mgt}{2m+M}\right]^2 + \tfrac{1}{2} m\left[\frac{2mgt}{2m+M}\right]^2$$
$$\boxed{E_k = \frac{mg^2t^2}{2\left(1+\dfrac{M}{2m}\right)}}$$

1.135. *Pada sistem dibawah ini anggap massa $m_2 > m_1$ dan massa katrol adalah m. Jari-jari katrol R. Hitung percepatan sudut katrol dan perbandingan tegangan T_1/T_2 !*

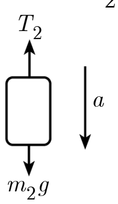


***Jawab*:** Benda m_1 (translasi):



$$T_1 - m_1g = m_1a$$

Benda m_2 (translasi):



$$m_2g - T_2 = m_2a$$

Selinder (rotasi)

Disini karena selinder berotasi searah dengan jarum jam, maka
$$T_2 > T_1$$
$$(T_2 - T_1)R = I\alpha = \tfrac{1}{2} mR^2\alpha$$

Karena selinder tidak slip, maka $a = \alpha R$.

Dari persamaan-persamaan diatas kita akan peroleh:
$$a = \frac{2(m_2 - m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}$$
$$T_1 = \frac{(4m_1m_2 + mm_1)g}{2(m_2 + m_1) + m}$$
$$T_2 = \frac{(4m_1m_2 + m_2m)g}{2(m_2 + m_1) + m}$$
$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(1+\dfrac{m}{4m_2}\right)}{\left(1+\dfrac{m}{4m_1}\right)}}$$