1.79. *Sebuah bola baja bermassa m = 50 g jatuh dari ketinggian h = 1,0 m pada permukaan horisontal sebuah papan tebal. Tentukan momentum total yang diberikan bola pada papan setelah terpental beberapa kali, bila setiap kali tumbukan kecepatan bola berkurang η = 1,25 kali!*

Jawab: Ketika bola dijatuhkan dari ketinggian h maka energi potensial diberikan menjadi energi kinetik ($mgh = \frac{1}{2} mv^2$) atau $v = \sqrt{2gh}$.

Momentum sebelum tumbukan pertama:

$$P_1 = mv$$

Momentum akhir setelah tumbukan pertama:

$$P'_1 = m\left(-v/\eta\right)$$

(tanda negatif karena bola berbalik arah).

Jadi, perubahan momentum bola setelah tumbrukan pertama:

$$\Delta P_1 = P'_1 - P_1$$

$$\Delta P_1 = -mv\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)$$

Tumbukan kedua.

Momentum awal: $P_2 = m\dfrac{v}{\eta}$

Momentum akhir setelah tubrukan kedua:

$$P'_2 = -m\frac{v}{\eta^2}$$

Jadi, perubahan momentum setelah tubrukan kedua:

$$\Delta P_2 = P'_2 - P_2$$

$$\Delta P_2 = -m\frac{v}{\eta}\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)$$

Dengan cara yang sama, untuk tubrukan ketiga:

$$\Delta P_3 = -m\frac{v}{\eta^2}\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)$$

Dengan demikian, perubahan total momentum bola:

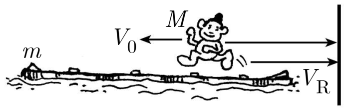
$$\begin{aligned}\Delta P &= \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 \\ &= -mv\frac{(\eta + 1)}{\eta}\left(1 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} + \ldots\right) \\ &= -mv\frac{(\eta + 1)}{\eta}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{\eta}}\right]\end{aligned}$$

atau,

$$\boxed{\Delta P = -m\sqrt{2gh}\,\frac{(\eta + 1)}{(\eta - 1)}}$$

Jadi, momentum yang diberikan pada papan: $\Delta P' = -\Delta P$ dengan memasukkan angkanya kita peroleh: $\Delta P' = 0{,}2$ kg.m/s.

1.80. *Seorang bermassa m berdiri di atas sebuah rakit yang bermassa M. Orang ini kemudian bergerak dengan kecepatan v' (dan percepatan a') relatif terhadap rakit sejauh L'. Hitung perpindahan rakit relatif terhadap pantai! Hitung juga gaya mendatar yang dikerjakan oleh orang itu terhadap rakit selama gerakan!*



Jawab:

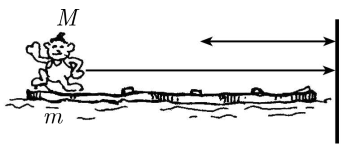
(a) Anggap rakit bergerak dengan kecepatan V_R dan orang bergerak relatif terhadap rakit dengan kecepatan V_0.

Momentum orang (terhadap tanah) $m(V_0 - V_R)$
Momentum rakit (terhadap tanah) $-MV_R$.

$$m(V_0 - V_R) - MV_R = 0$$

$$V_R = \frac{m}{M+m}V_0$$

Waktu yang diperlukan orang menempuh L adalah $\frac{L'}{V_0}$



Jadi perpindahan rakit menurut pantai adalah

$$L = V_R \cdot t = \frac{m}{M+m}V_0\frac{L'}{V_0} = \frac{m}{M+m}L'$$

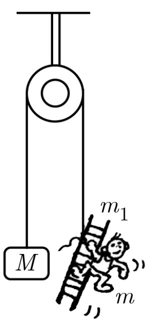
(b) Dari persamaan L di atas kita bisa katakan bahwa percepatan rakit adalah:

$$a = \frac{ma'}{M+m}$$

Dengan hukum Newton, kita peroleh bahwa besarnya gaya yang diberikan orang pada rakit adalah:

$$\boxed{F = \frac{mMa'}{M+m}}$$

1.81. *Pada sebuah katrol dilewatkan seutas tali kuat. Pada salah satu ujung tali tergantung sebuah tangga dengan seorang bermassa m berada di dasar tangga. Pada ujung lain digantungkan beban bermassa M. Orang ini kemudian naik setinggi h' relatif terhadap tangga, lalu berhenti. Abaikan massa tali dan gesekan, hitung perpindahan pusat massa sistem!*



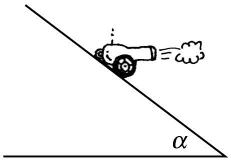
Jawab: Anggap orang (m) naik sejauh x_1 dari posisi semula dan tangga ($M - m$) turun sejauh x_2 dari posisi semula. Karena tali tidak lentur maka beban M naik sejauh x_2 (akibat turunnya tangga). Perubahan posisi pusat massa sistem adalah

$$\Delta = \frac{mx_1 - (M-m)x_2 + Mx_2}{M + m + (M-m)}$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2M}$$

$$= \frac{mh'}{M}$$

1.82. *Sebuah meriam bermassa m meluncur di atas bidang miring dengan sudut miring α. Setelah meriam menempuh jarak l sebuah peluru ditembakkan dalam arah mendatar dengan momentum P. Sebagai akibatnya, meriam berhenti. Anggap massa peluru diabaikan bila dibandingkan dengan massa meriam, tentukan lama tembakan.*



Jawab: Kecepatan meriam setelah menempuh jarak l (gunakan $mgh = \frac{1}{2} mv^2$) adalah:

$$v = \sqrt{2gl \sin\alpha}$$

Momentum awal meriam:

$$P_1 = m\sqrt{2gl \sin\alpha}$$

Selama t detik gravitasi memberikan impuls sebesar $(mg \sin \alpha)$t.

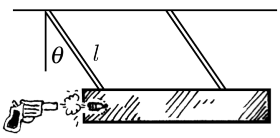
Komponen momentum arah sejajar bidang miring harus bisa mengalahkan impuls gravitasi dan momentum awal ini sehingga

$$P \cos \alpha = m\sqrt{2gl \sin\alpha} + (mg \sin \alpha)t$$

atau

$$\boxed{t = \frac{P\cos\alpha - m\sqrt{2gl\sin\alpha}}{mg\sin\alpha}}$$

1.83. *Sebuah peluru bermassa m ditembakkan ke dalam suatu balok bermassa M yang digantungkan oleh dua utas tali dengan panjang l. Balok ini berayun sedemikian sehingga tali membentuk sudut θ (maksimum) dengan vertikal. Anggap m ≪ M, hitung:*



(a) kecepatan peluru sebelum menumbuk balok;
(b) energi kinetik yang berubah menjadi panas.

Jawab:

(a) Kenaikan balok setelah peluru masuk adalah:

$$\Delta h = l - l \cos \theta$$

Ketika balok naik energi kinetik diubah menjadi energi potensial. Sehingga:

$$\tfrac{1}{2}(M + m)v'^2 = (m + M)g\Delta h$$

v' disini adalah kecepatan balok setelah ditumbuk peluru.

Sekarang perhatikan tumbukan peluru dengan balok:

Sebelum tumbukan: $P = mv$

Sesudah tumbukan: $P = (M + m)v'$

Karena momentum kekal (balok dan peluru dianggap benda titik) maka:

$$mv = (M + m)v'$$

Dari persamaan energi dan persamaan momentum di atas kita peroleh:

$$v = 2\left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{gl}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Bila $m \ll M$, maka;

$$v = 2\left(\frac{M}{m}\right)\sqrt{gl}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(b) Energi kinetik awal sistem:

$$E_k = \tfrac{1}{2} mv^2$$

Energi kinetik akhir sistem setelah tumbukan inelastis:

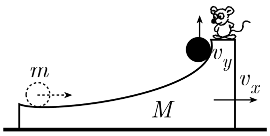
$$E_k' = \tfrac{1}{2}(M + m)v'^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{m^2v^2}{(M+m)}$$

Jadi energi yang hilang adalah:

$$\boxed{\Delta E_k = E_k \frac{M}{(M+m)}}$$

1.84. *Sebuah cakram kecil bermassa m diletakan di atas benda bermassa M yang terletak pada bidang datar licin. Cakram kemudian diberi kecepatan v. Hitung sampai ketinggian berapa cakram ini akan naik setelah meninggalkan benda M! Abaikan semua gesekan.*



Jawab: Cakram m dan benda M akan bertumbukan. Anggap ketika cakram mencapai ujung atas bidang, kecepatan M (dan m) arah mendatar adalah v_x.

Kekekalan momentum arah sumbu x:

$$mv = (M + m)v_x$$

Kekekalan energi (tumbukan elastik) di ujung bidang, cakram punya 2 komponen kecepatan v_x dan v_y.

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2) + \tfrac{1}{2} Mv_x^2$$

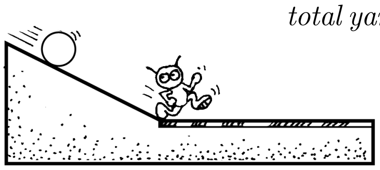
Benda m akan lepas dari M dengan kecepatan v_y. Ketinggian yang akan dicapai adalah h (gunakan $\tfrac{1}{2} mv_y^2 = mgh$).

$$v_y = \sqrt{2gh}$$

Dari ketiga persamaan diatas kita akan peroleh:

$$\boxed{h = \frac{Mv^2}{2g(M+m)}}$$

1.85. *Sebuah benda kecil bermassa m meluncur ke bawah suatu bukit licin dari ketinggian h tanpa kecepatan awal. Di dasar bukit benda mengenai papan bermassa M. Karena gesekan antara benda dan papan, benda diperlambat dan kemudian bergerak bersama papan dengan kecepatan sama. Hitung usaha total yang dilakukan oleh gaya gesekan dalam proses ini!*



Jawab:

Massa m jatuh dari ketinggian h. Dengan mengingat bahwa energi potensial diubah menjadi energi kinetik ($mgh = \frac{1}{2} mv^2$), kecepatan benda m di dasar bukit adalah:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Tumbukan antara massa m dan papan (momentum kekal):

$$mv = (M + m)v'$$

Dari kedua persamaan di atas kita peroleh nilai v'.

Usaha yang dilakukan gaya gesekan papan dengan benda sama dengan perbedaan energi kinetik:

$$W = \Delta E_k = E_k' - E_k$$

Dimana

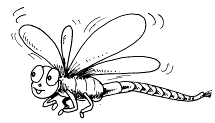
$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

dan

$$E_k' = \frac{1}{2}(M + m)v'^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh,

$$\boxed{W = -\frac{mMgh}{M + m}}$$



1.86. *Sebuah batu jatuh bebas dari ketinggian h. Batu menghantam tanah dengan kecepatan $v_0 = \sqrt{2gh}$ relatif terhadap bumi. Hitung kecepatan batu ketika menghantam tanah dilihat oleh orang yang berada dalam suatu kerangka A jatuh (bukan naik) dengan kecepatan v_0!*

Jawab: A akan melihat batu bergerak naik dengan kecepatan v_0 diperlambat oleh g.

Posisi batu menurut A adalah

$$Y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

setelah waktu $t_0 = \dfrac{v_0}{g}$

$$Y = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

Posisi batu setelah menempuh jarak $h = v_0 t_0 - h$

dimana $t_0 = \dfrac{v_0}{g}$

Jadi, $h = \frac{1}{2} g t_0^2$

$$t_0^2 = \frac{2h}{g}$$

$$\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{2h}{g} \rightarrow v_0 = \boxed{\sqrt{2gh}}$$

1.87. *Sebuah benda bermassa 1 kg bergerak dengan kecepatan $\vec{v}_1 = 3{,}0\vec{i} - 2{,}0\vec{j}$ menumbuk secara tidak lenting sama sekali benda lain yang bermassa 2 kg yang sedang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}_2 = 4{,}0\vec{j} - 6{,}0\vec{k}$. Tentukan kecepatan benda-benda ini setelah tumbukan! (semua satuan dalam MKS).*

Jawab: Pada tumbukan tidak elastik, setelah tumbukan kedua benda akan bergerak dengan kecepatan sama.

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

atau,

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Dengan memasukkan nilainya, kita peroleh:

$$\vec{v} = 1{,}0\,\vec{i} + 2{,}0\,\vec{j} - 4{,}0\,\vec{k}$$

Besar kecepatannya: $\boxed{v = 4{,}6\ m/s}$

1.88. *Tentukan perubahan energi kinetik dari suatu sistem yang terdiri dari dua benda masing-masing bermassa m_1 dan m_2 yang bertumbukan secara tidak lenting sama sekali, bila kecepatan awal benda-benda ini adalah v_1 dan v_2!*

Jawab: Pada tumbukan tidak elastik, kecepatan sesudah tumbukan dari kedua benda sama besar.

Hukum kekekalan momentum:

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2$$

Energi kinetik awal sistem

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

Energi kinetik akhir sistem

$$E_k' = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

Perubahan energi kinetik

$$\Delta E_k = E_k' - E_k$$

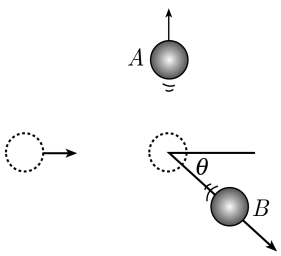
Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita peroleh:

$$\boxed{\Delta E_k = \frac{-m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}}$$

1.89. *Suatu partikel A bermassa m_1 menumbuk secara lenting sempurna partikel B yang diam dan bermassa m_2. Hitung berapa bagian energi kinetik partikel A yang hilang, bila:*

(a) partikel A menyimpang tegak lurus dari gerakan semula!

(b) tumbukannya adalah tumbukan sentral!



Jawab:

(a) Anggap u adalah kecepatan partikel A sebelum tumbukan. Anggap v_A dan v_B adalah kecepatan A dan B setelah tumbukan.

Momentum arah sumbu x:

$$m_1u + 0 = 0 + m_2v_B\cos\theta$$

Momentum arah sumbu y:

$$0 = m_1 v_A - m_2 v_B \sin \boldsymbol{\theta}$$

Kekekalan energi kinetik (tumbukan elastik):

$$\tfrac{1}{2} m_1 u^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_B^2$$

Dari ketiga persamaan di atas kita akan peroleh:

$$\left(\frac{v_A}{u}\right)^2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

Energi yang hilang dari partikel A:

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2} m_1 u^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2$$

Dan bagian energi kinetik yang hilang dari partikel A adalah:

$$\boxed{\Delta = \frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}}$$

(b) Pada tumbukan sentral, partikel A dan B akan bergerak pada arah sumbu x.

Kekekalan momentum:

$$m_1 u = m_1 v_A + m_2 v_B$$

Kekekalan energi kinetik:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_B^2$$

Dari kedua persamaan di atas, kita peroleh:

$$u = \frac{(m_1 + m_2)\, v_B}{2m_1}$$

dan

$$v_A = \frac{(m_1 - m_2)\, v_B}{2m_1}$$

Bagian energi kinetik partikel A yang hilang:

$$\Delta = \left(1 - \frac{v_A^2}{u^2}\right) = \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right]$$

atau

$$\boxed{\Delta = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}}$$

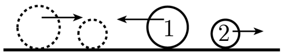
1.90. *Partikel 1 bertumbukan elastik dengan partikel 2 yang diam. Tentukan perbandingan massa kedua partikel, bila:*

(a) setelah tumbukan sentral, partikel-partikel bergerak berlawanan dengan kecepatan sama!

(b) setelah tumbukan, partikel-partikel bergerak secara simetri dengan sudut 60^o!

Jawab:

(a) Kekekalan momentum:



$$m_1 u_1 = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

dimana, u_1 adalah kecepatan awal partikel 1.

Karena $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

maka, $v = \dfrac{m_1 u_1}{m_1 - m_2}$

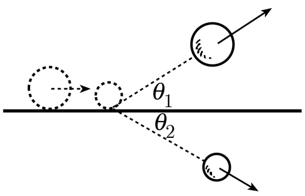
Kekekalan energi kinetik:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Selanjutnya dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}$$

(b) Karena partikel terpisah secara simetris pada sudut 60°, $\theta_1 + \theta_2 = 60^{\circ}$, maka $\theta_1 = 30^{\circ}$ dan $\theta_2 = 30^{\circ}$.



Kekekalan momentum:

Arah sumbu x:

$$m_1 u_1 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) \cos 30^{\circ}$$

Arah sumbu y:

$$m_1 v_1 \sin 30^{\circ} = m_2 v_2 \sin 30^{\circ}$$

Kekekalan Energi:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Dari persamaan-persamaan diatas kita peroleh:

$$4 \cos^2 30^{\circ} = 1 + \frac{m_1}{m_2}$$

atau

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = 2}$$

1.91. *Sebuah peluru bergerak dengan kecepatan v = 500 m/s. Peluru ini kemudian pecah menjadi tiga bagian yang sama sehingga energi kinetik sistem meningkat η = 1,5 kali. Hitung kecepatan terbesar dari antara ketiga komponen ini!*

Jawab:

Kekekalan momentum:

$$mv = \frac{m}{3} v_1 + \frac{m}{3} v_2 + \frac{m}{3} v_3$$

Karena $\eta = 1{,}5$, maka

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v_3^2}{\frac{1}{2}\,mv^2}$$

$$3\eta v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Dari persaman di atas kita peroleh,

$$3\eta v^2 = 2v_1^2 + 2v_2^2 + 9v^2 - 6vv_1 + 2v_1v_2 - 6vv_2$$

atau,

$$2v_1^2 - 2v_1(3v - v_2) + [(9 - 3\eta)v^2 + 2v_2^2 - 6vv_2] = 0$$

Dengan menggunakan rumus abc kita akan peroleh v_1. Pada rumus *abc,* nilai yang berada dalam akar (diskriminan) haruslah lebih besar atau sama dengan nol. Dengan kata lain:

$$4(3v - v_2)^2 - 4\cdot 2\,[(9 - 3\eta)v^2 + 2v_2^2 - 6vv_2] \geqslant 0$$

dengan menyelesaikan dan menyederhanakan persamaan di atas diperoleh:

$$\boxed{v_2 \geqslant v(1 + \sqrt{2\eta - 2}\,)}$$

Jadi,

$$v_2(\text{maksimum}) = v(1 + \sqrt{2\eta - 2}\,)$$
$$= \boxed{\mathbf{1\ km/s}}$$

1.92. *Partikel 1 yang bergerak dengan kecepatan v = 10 m/s menumbuk sentral partikel 2 yang diam. Kedua partikel bermassa sama. Akibat tumbukan ini energi kinetik sistem berkurang η = 1,0%. Tentukan besar dan arah kecepatan partikel 1 setelah tumbukan!*

Jawab : Anggap kecepatan partikel-partikel ini setelah tumbukan adalah v_1 dan v_2.

Kekekalan momentum:

$$mv = mv_1 + mv_2$$

Kekekalan energi total:

Energi mula-mula = Energi akhir + Energi yang hilang

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 + \eta(\tfrac{1}{2}mv^2)$$

dari kedua persamaan di atas kita peroleh,

$$2v_1^2 - 2vv_1 + \eta v^2 = 0$$

jadi,

$$v_1 = \frac{\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\eta}\right)v}{2}$$

Disini, tanda positif sebelum akar kuadrat tidak diperbolehkan karena akan membuat v_2 negatif dan hal ini tidak mungkin.

Jadi,

$$v_1 = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 2\eta}\right) v}{2}$$

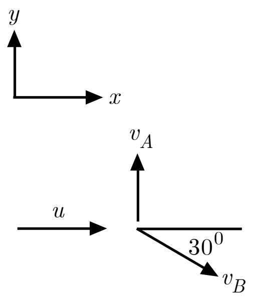
dan, jika $\eta \ll 1$, maka dengan menggunakan ekspansi binomial kita peroleh:

$$v_1 = {}^{\eta v}\!/_{2} = 5 \text{ cm/s}$$

Catatan: Ekspansi binomial adalah sebagai berikut:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n\text{-}1}b + {}^{1}\!/_{2}\, n(n - 1)a^{n\text{-}2}b^2 + ...$$

1.93. *Sebuah partikel A bermassa m menumbuk partikel B yang diam dan bermassa M. Partikel A kemudian menyimpang dengan sudut* ${}^{\pi}\!/_{2}$*, sedangkan partikel B menyimpang dengan sudut* $\theta = 30^o$ *terhadap gerakan awal partikel A. Berapa persen perubahan energi kinetik sistem setelah tumbukan jika* ${}^{M}\!/_{m} = 5{,}0$*?*



Jawab: Anggap kecepatan awal partikel A sebelum tumbukan adalah u dan kecepatan setelah tumbukan adalah v_A dan v_B.

Kekekalan momentum:

Arah sumbu x:

$$mu = Mv_B \cos 30^{\text{o}}$$

Arah sumbu y:

$$mv_A - Mv_B \sin 30^{\text{o}} = 0$$

Energi kinetik awal:

$$E_k = {}^{1}\!/_{2}\, mu^2$$

Energi kinetik akhir:

$$E_k' = {}^{1}\!/_{2}\, m v_A^2 + {}^{1}\!/_{2}\, m v_B^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\frac{E_k'}{E_k} = \left(\frac{m}{M \cos 30^\circ}\right)^2$$

Selanjutnya kita akan peroleh:

$$\boxed{\frac{\Delta E_k}{E_k} = \left[\tan^2 30^\circ + \left(\frac{m}{M \cos 30^\circ}\right)^2 - 1\right]}$$

Dengan memasukkan angka-angkanya kita peroleh bahwa: $\boldsymbol{\Delta E_k} \approx \boxed{\mathbf{-40\%}\ \boldsymbol{E_k}}$

1.94. *Dua partikel bermassa* m_1 *dan* m_2 *bergerak saling tegak lurus satu sama lain dengan kecepatan* v_1 *dan* v_2*. Hitung (dalam kerangka pusat massa):*

(a) momentum setiap partikel!

(b) energi kinetik total!

Jawab:

(a) Kecepatan pusat massa sistem adalah (analog dengan rumus koordinat pusat massa)

$$\vec{v}_{pm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Momentum partikel pertama dalam kerangka pusat massa sistem:

$$\vec{P}_{1(pm)} = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_{pm}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Sedangkan partikel kedua memiliki momentum:

$$\vec{P}_{2(pm)} = m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_{pm}\right) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Karena $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, maka:

$$P_{1(pm)} = P_{2(pm)} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

(b) Energi kinetik partikel pertama dalam kerangka pusat massa sistem adalah:

$$E_{1(pm)} = \tfrac{1}{2} m_1\left(\vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2$$

Dengan cara yang sama,

$$E_{2(pm)} = \tfrac{1}{2}\frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2$$

Jadi, energi kinetik total pusat massa adalah:

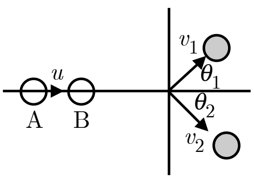
$$E_k = E_{1(pm)} + E_{2(pm)}.$$

$$\boxed{E_k = \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^2 + v_2^2)}$$

(karena tegak lurus $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$).

1.95. *Sebuah partikel A bermassa m_1 menumbuk partikel B yang diam dan bermassa m_2 ($m_1 > m_2$) secara elastik. Tentukan sudut maksimum partikel A setelah tumbukan!*

Jawab:



Kekekalan momentum:

Arah sumbu x:

$$m_1 u = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$

Arah sumbu y:

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2$$

Kekekalan energi kinetik (tumbukan elastik):

$$\tfrac{1}{2} m_1 u^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh,

$$u^2(m_1 m_2 - m_1^2) + u(2m_1^2 v_1 \cos\theta_1) - v_1^2(m_1 m_2 + m_1^2) = 0$$

Dengan rumus *abc* kita bisa menghitung *u*. Tetapi diskriminan (bilangan yang terdapat dalam akar kuadrat persamaan *abc*) harus lebih besar atau sama dengan nol.

Sehingga:

$$4m_1^4 v_1^2 \cos^2\theta_1 \geqslant 4(m_1^2 - m_1 m_2)(m_1^2 + m_1 m_2)v_1^2$$

atau,

$$\cos^2\theta_1 \geqslant 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

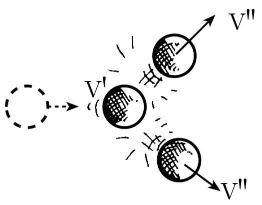
Jadi, agar nilai θ_1 maksimum (atau nilai cos θ_1 minimum)

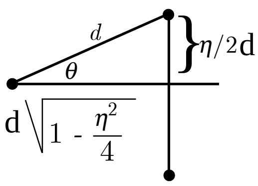
$$\cos^2\theta_m = 1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2$$

atau:

$$\boxed{\theta_m = \cos^{-1}\left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]^{1/2}}$$

1.96. *Tiga bola identik A, B, dan C terletak pada suatu bidang datar licin. Bola A bergerak dengan kecepatan v dan menumbuk bola B dan C yang sedang diam secara bersamaan. Jarak pusat massa B dan C sebelum tumbukan adalah ηd dimana d adalah diameter bola. Tentukan kecepatan A setelah tumbukan. Pada nilai η berapakah bola akan tertolak ke belakang; berhenti; terus bergerak?*





Jawab: Anggap sudut ABC adalah θ, maka:

$$\cos\theta = \frac{d\eta/2}{d} = \eta/2$$

Tinjau momentum arah sumbu mendatar. Anggap setelah tumbukan, kecepatan B dan C adalah v'' sedangkan kecepatan A adalah v'.

Kekekalan momentum:

$$mv = mv' + 2mv'' \cos\theta$$

$$v - v' = 2v'' \cos\theta$$

$$(v - v')^2 = 4v''^2 \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Kekekalan energi kinetik: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\,2\,mv''^2$

$$v^2 - v'^2 = v''^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

1 dan 2

$$\frac{\cancel{(v-v')}(v-v')}{\cancel{(v-v')}(v+v')} = 2\cos^2\theta$$

$$v' = -v\left(\frac{2-\eta^2}{6-\eta^2}\right)$$

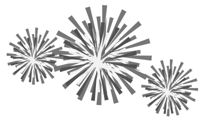
Ketika A tertolak ke belakang, v' harus negatif.

Jadi, $\boxed{2 > \eta^2}$

atau, $\boxed{\eta < \sqrt{2}}$

Agar A berhenti, $v' = 0$

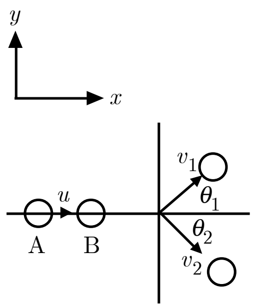
jadi, $\boxed{\eta = \sqrt{2}}$



Agar A bergerak ke ke depan, v' adalah positif.

Jadi, $\boxed{\eta > \sqrt{2}}$

1.97. *Sebuah molekul menumbuk molekul sejenis yang sedang diam. Buktikan bahwa kedua molekul akan membentuk sudut 90º ketika tumbukannya lenting sempurna!*



Jawab:

Kekekalan momentum:

Arah sumbu x:

$$m_1 u = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$

Arah sumbu y:

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2$$

Dari kedua persamaan di atas (dengan mengingat massa kedua molekul sama) maka kita peroleh:

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

Kekekalan energi kinetik:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh persamaan berikut:

$$0 = 2v_1 v_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

atau,

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

dengan kata lain:

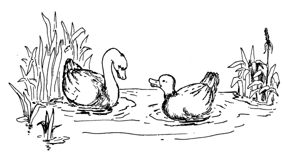
$$\boxed{\theta_1 + \theta_2 = \pi/2}$$

Bila tumbukan tidak lenting sempurna maka

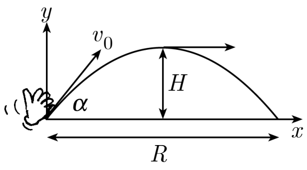
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) \neq 0$$

atau,

$$\theta_1 + \theta_2 \neq \pi/2$$



1.98. *Sebuah bola bermassa m dilemparkan dengan sudut elevasi α dan dengan kecepatan awal v_0. Hitung besar momentum sudut terhadap titik awal pada titik tertinggi lintasan bila m = 130 gram, $\alpha = 45°$, dan $v_0 = 25$ m/s! Abaikan hambatan udara.*



Jawab:

Pada titik tertinggi: $v = v_x = v_0 \cos \alpha$

dan $v_y = 0$.

Dengan rumus $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ dan $v_y = v_{0y} - gt$ serta persamaan di atas kita akan peroleh tinggi titik tertinggi adalah:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

vektor momentum

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

atau

$$\vec{P} = (mv_0 \cos \alpha)\,\vec{i}$$

Vektor posisi dari titik tertinggi adalah:

$$\vec{r} = \left(\frac{R}{2}\right)\vec{i} + H\vec{j}$$

dimana R adalah jangkauan proyektil.

Jadi, momentum sudut partikel terhadap titik asal, ketika partikel berada pada titik tertinggi adalah:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{P}\\ &= \left(\tfrac{R}{2}\vec{i} + H\vec{j}\right) \times (mv_0 \cos \alpha)\,\vec{i}\\ &= -Hmv_0 \cos \alpha\,\vec{k}\end{aligned}$$

atau

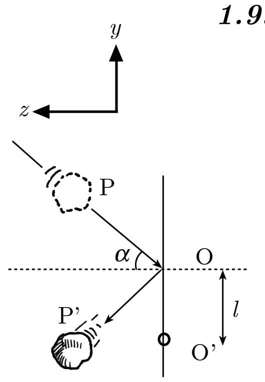
$$\boxed{\vec{L} = -\left(\frac{mv_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2g}\right)\vec{k}}$$

$$L = 37\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

1.99. *Sebuah benda A bermassa m meluncur pada permukaan datar licin dengan kecepatan v. Benda ini menumbuk dinding di titik O secara elastik dengan sudut datang α (terhadap garis normal). Tentukan:*

(a) titik-titik terhadap mana momentum sudut benda konstan!

*(b) besar perubahan vektor momentum sudut **L** relatif terhadap titik O' yang terletak di dalam bidang gerak (pada sumbu vertikal) dan berjarak l dari titik O!*



Jawab:

(a) Gunakan rumus $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ Anda dapat membuktikan bahwa momentum sudut terhadap titik-titik pada garis normal adalah sama besar (konstan).

(b) Besar momentum sudut awal:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{P}|$$

atau, $L = -mv_0 l \cos \alpha$

Tanda negatif menunjukkan bahwa momentum sudut awal mempunyai arah sumbu z negatif.

Momentum sudut akhir:

$$L' = |\vec{r} \times \vec{P}| = mv_0 l \cos\alpha$$

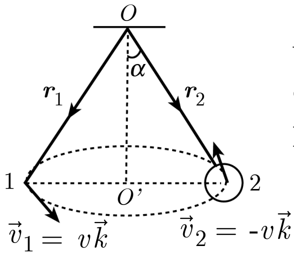
Perubahan momentum sudut:

$$\Delta L = mv_0 l \cos\alpha - (-mv_0 l \cos\alpha)$$

atau,

$$\boxed{\Delta L = 2mv_0 l \cos\alpha}$$

1.100. *Sebuah bola kecil bermassa m digantung dengan benang yang panjangnya l pada titik O di suatu langit-langit. Bola bergerak dalam suatu lingkaran mendatar dengan kecepatan sudut konstan ω. Relatif terhadap titik manakah momentum sudut bola $\vec{L}$ tetap konstan? Tentukan perubahan vektor momentum sudut bola relatif terhadap titik O dalam setengah putaran!*



Jawab: Pada gambar di atas arah sumbu x, y dan z dinyatakan oleh vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$,dan $\vec{k}$.

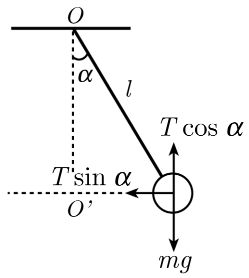
Gaya-gaya yang bekerja ditunjukkan pada gambar di bawah ini:

Dalam keadaan seimbang:

$$T\cos\alpha = mg$$

$$T\sin\alpha = m\omega^2 l \sin\alpha$$

atau



$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

dan

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2}$$

Dari gambar terlihat bahwa $T\sin\theta$ mengimbangi gaya sentrifugal, dan selalu mengarah ke pusat lingkaran horizontal O'. Jelas juga terlihat bahwa titik O' adalah titik dimana resultan torsi adalah nol. Oleh karena itu, momentum sudut bola akan selalu konstan di titik O'.

Momentum sudut bola terhadap titik O ketika bola berada pada titik 1 adalah:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1$$

Di titik 2:

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

Vektor posisi titik 1 dan 2 terhadap titik O adalah:

$$\vec{r}_1 = l(-\vec{i}\sin\alpha - \vec{j}\cos\alpha)$$

$$\vec{r}_2 = l(\vec{i}\sin\alpha - \vec{j}\cos\alpha)$$

Sehingga kita peroleh:

$$\vec{L}_1 = mvl(-\vec{j}\sin\alpha + \vec{i}\cos\alpha)$$

$$\vec{L}_2 = -mvl(\vec{j}\sin\alpha + \vec{i}\cos\alpha)$$

Perubahan momentum sudut dalam setengah putaran adalah:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

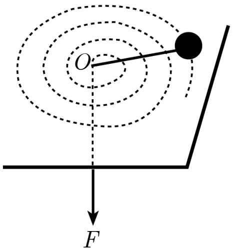
$$= mvl(-\vec{j}\ \sin\alpha - \vec{i}\ \cos\alpha + \vec{j}\ \sin\alpha - \vec{i}\ \cos\alpha)$$

Gunakan $v = \omega l \sin \alpha$, kita akan peroleh besarnya perubahan momentum sudut ini adalah:

$$\Delta L = 2ml^2\omega \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\Delta L = 2mg\, l/\omega \sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2}$$

1.101. *Sebuah benda bermassa m terikat pada suatu tali dalam suatu bidang datar. Ujung tali yang lain dimasukkan ke suatu lubang dalam bidang datar itu dan ditarik dengan kecepatan konstan. Hitung tegangan tali sebagai fungsi jarak r antara benda dan lubang bila pada $r = r_0$ kecepatan sudut tali ω_0!*



Jawab: Tegangan tali dan gaya F arahnya ke pusat lintasan lingkatan (titik O) sehingga tidak akan memberikan momen gaya terhadap titik O. Karena momen gaya nol maka momentum sudut terhadap titik O kekal.

$$mr_0^2 \times \omega_0 = mr^2 \times \omega$$

atau,

$$v = \frac{r_0^2\omega_0}{r}$$

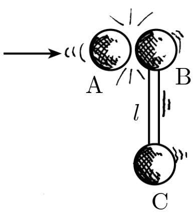
Tegangan pada tali memberikan gaya sentripetal, sehingga:

$$T = \frac{mv^2}{r}$$

Sehingga kita peroleh:

$$\boxed{T = \frac{mr_0^4\omega_0^2}{r^3}}$$

1.102. *Suatu bola bermassa m bergerak dengan kecepatan v_0. Bola ini menumbuk secara elastik suatu "dumb bell" (lihat gambar). Massa tiap bola pada dumb bell itu masing-masing $m/2$ dan jarak antara kedua bola bulatan adalah l. Hitung momentum sudut $\vec{L}$ dumb bell setelah tumbukan, terhadap titik pusat massa dumb bell!*



Jawab: Tumbukan antara A dan B (lihat gambar):

Kekekalan momentum:

$$mv_0 = mv'_0 + (m/2)\, v_1$$

Tumbukan elastik (kekekalan energi kinetik):

$$\tfrac{1}{2} mv_0^2 = \tfrac{1}{2} mv'^2_0 + \tfrac{1}{2}(m/2)\, v_1^2$$

dimana v_0' dan v_1 adalah kecepatan bola A dan B setelah tumbukan.

Dari kedua persamaan di atas kita peroleh, $v_1 = {}^{4v_0}\!/_3$. Jadi kecepatan pusat massa *dumb bell* adalah:

$$v_{pm} = \frac{\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{4v_0}{3}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)0}{\left({}^{m}\!/_2 + {}^{m}\!/_2\right)} = \frac{2v_0}{3}$$

arah kecepatan pusat massa ini ke kanan.

Kecepatan bola B dan C relatif terhadap pusat massa ini adalah:

$$v_{1pm} = v_1 - v_{pm} = {}^{2v_0}\!/_3$$

$$v_{2pm} = v_2 - v_{pm} = {}^{-2v_0}\!/_3 \text{ (arah ke kiri).}$$

Momentum sudut *dumb bell* terhadap pusat massa adalah:

$$\vec{L}_{pm} = \vec{r}_{1pm} \times \left({}^{m}\!/_2\right) \vec{v}_{1pm} + \vec{r}_{2pm} \times \left({}^{m}\!/_2\right) \vec{v}_{2pm}$$

Dalam bentuk vektor:

$$\vec{r}_{1pm} = \left({}^{l}\!/_2\right) \vec{j}$$

$$\vec{r}_{2pm} = \left(-{}^{l}\!/_2\right) \vec{j}$$

$$\vec{v}_{1pm} = \left({}^{2v_0}\!/_3\right) \vec{i}$$

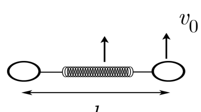
$$\vec{v}_{2pm} = \left(-{}^{2v_0}\!/_3\right) \vec{i}$$

Sehingga kita peroleh:

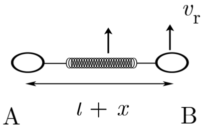
$$\boxed{\vec{L}_{pm} = -\left(\frac{mv_0 l}{3}\right) \vec{k}}$$

Besar momentum sudut ini adalah: $\left(\frac{mv_0 l}{3}\right)$.

1.103. *Dua benda masing-masing bermassa m, dihubungkan dengan sebuah pegas panjang l dan konstanta pegas k. Pada suatu ketika satu dari benda ini digerakan dalam arah mendatar dengan kecepatan v_0. Tentukan perubahan panjang pegas maksimum dalam peristiwa ini.*



awal



akhir

Jawab:

$$v_{pm} = \frac{mv_0 + 0.m}{m + m} = \frac{1}{2} v_0 \text{ (kecepatan pusat massa)}$$

Kecepatan B relatif terhadap pusat massa

$$v_{B\text{-}pm} = v_B - v_{pm}$$
$$= v_0 - \frac{1}{2} v_0 = \frac{1}{2} v_0$$

Kecepatan A relatif terhadap pusat massa

$$v_{A\text{-}pm} = v_A - v_{pm}$$
$$= 0 - \frac{1}{2} v_0 = -\frac{1}{2} v_0$$

Momentum sudut awal terhadap pusat massa

$$m_B v_{B\text{-}pm}\ \frac{1}{2}\, l_0 + m_{A\text{-}pm}(\frac{1}{2}\, l_0)$$

$$= m.(\frac{1}{2}\, v_0)\frac{1}{2}\, l_0 + m(-\frac{1}{2}\, v_0)(-\frac{1}{2}\, l_0)$$

$$= \frac{1}{2}\, m v_0 l_0$$

momentum akhir terhadap pusat massa

$$= \frac{1}{2}\, m v_r\ (l + x)$$

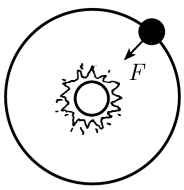
Kekekalan energi

$$\frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_0}{2})^2 + \frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_0}{2})^2 = \frac{1}{2}\, k\ x^2 + \frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_r}{2})^2 + \frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_r}{2})^2$$

Gunakan kekekalan momentum sudut dan kekekalan energi.

diperoleh $x = \dfrac{m v_0^2}{kl}$

1.104. *Sebuah planet bermassa M = 1,65×10^{30} kg, bergerak mengelilingi Matahari dengan kecepatan v = 32,9 km/s (dalam kerangka matahari). Hitung periode revolusi planet ini! Anggap lintasan planet melingkar.*



Jawab: Gaya sentripetal yang menyebabkan planet bergerak melingkar adalah gaya gravitasi, sehingga dengan hukum Newton:

$$F = ma.$$

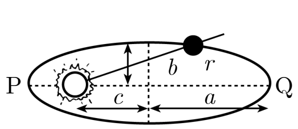
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

Perioda planet (waktu 1 putaran) adalah:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi GM}{v^3} = \boxed{\textbf{225 hari}}$$

1.105. *Jika lintasan suatu planet berbentuk ellips, buktikan bahwa T^2 sebanding dengan r^3 (hukum Keppler III), dimana T adalah perioda planet dan r adalah jarak planet ke Matahari!*

Jawab:

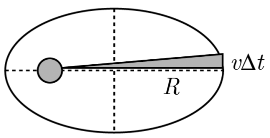


Luas daerah yang diarsir adalah (anggap luas segitiga)

$$\Delta A = 1/2\ |\vec{R} \times \vec{v}\ \Delta t|$$

Karena momentum sudut planet adalah $\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v}$ maka:

$$\Delta A/_{\Delta t} = \left(L/_{2m}\right)$$



Ini artinya laju luas yang disapu oleh gerakan planet adalah konstan (ingat momentum sudut planet konstan).

Jika $\Delta t = T$ adalah perioda, maka luas ellips A dapat ditulis:

$$A/_{T} = \left(L/_{2m}\right)$$

Karena luas ellips adalah A = πab, maka

$$T = 2\pi m \,{}^{ab}\!/_{L}$$

Sekarang perhatikan keadaan planet di titik P (jarak Matahari ke titik P adalah R_p) dan titik Q (jarak matahari ke titik Q adalah R_Q).

Kekekalan momentum sudut:

$$mR_p v_p = mR_Q v_Q = L$$

Kekekalan energi:

$$\tfrac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GMm}{R_P} = \tfrac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{GMm}{R_Q}$$

Dari kedua persamaan di atas kita peroleh,

$$\left({}^{L^2}\!/_{2m}\right)(R_P + R_Q) = GMmR_P R_Q$$

Dalam ellips terdapat hubungan berikut:

$$R_P + R_Q = 2a$$

$$R_P = a(1 - e)$$

$$R_Q = a(1 + e)$$

$$b^2 = a^2 - a^2e^2$$

dimana e adalah eksentrisitas ellips.

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$L^2 = \frac{GMm^2b^2}{a}$$

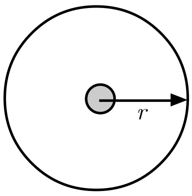
Selanjutnya kita akan peroleh:

$$\boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3}$$

1.106. *Periode revolusi Yupiter 12 kali periode revolusi Bumi. Anggap orbit planet melingkar, tentukan:*

(a) perbandingan jarak Yupiter-Matahari dengan Bumi-Matahari!

(b) kecepatan dan percepatan planet Yupiter dalam kerangka matahari!



Jawab:

(a) Anggap suatu planet berputar mengelilingi matahari dengan perioda T dan jari-jari orbit r.

Dari hukum Newton ($F = ma$) kita peroleh:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

Karena $v = \left({}^{2\pi}\!/_{T}\right) r$, maka $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3$

Diketahui bahwa: $T_Y/T_B = 12$

Karena T^2 sebanding dengan r^3 maka

$$\frac{r_Y}{r_B} = \left(\frac{T_y}{T_B}\right)^{2/3}$$

atau $r_Y = 5{,}2\ r_B$

(b) Percepatan Yupiter mengitari Matahari dapat dicari dengan rumus Newton $F = ma$.

$$m_Y a = \frac{GMm_Y}{r_y^2}$$

atau

$$a_Y = \frac{GM}{r_Y^2} = \frac{GM}{(5,2r_B)^2} = \frac{1}{(5,2)^2}\,g$$

karena $a = v^2/r$ maka kecepatan planet Yupiter adalah:

$$\boxed{v_Y = \sqrt{\frac{GM}{5,2r_B}}}$$

1.107. *Sebuah planet bermassa M bergerak mengitari Matahari pada lintasan elips. Jika jarak minimum planet dari Matahari r dan jarak maksimum R. Tentukan periode revolusi planet mengitari Matahari!*

Jawab: Soal ini mirip dengan soal sebelumnya. Silahkan Anda buktikan bahwa:

$$\boxed{T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{GM_s}}\right)\left(\frac{R+r}{2}\right)^{3/2}}$$

1.108. *Sebuah benda kecil jatuh pada Matahari dari jarak yang sama dengan jari-jari lintasan Bumi. Kecepatan awal benda nol menurut matahari. Dengan menggunakan Hukum Kepler, tentukan berapa lama benda akan jatuh?*

Jawab: Benda yang jatuh ke Matahari dapat dianggap sebagai suatu planet kecil yang lintasan ellipsnya sangat pipih dengan sumbu semi mayornya adalah $R/2$.

Menurut Hukum Keppler, T^2 sebanding dengan r^3, sehingga:

$$\left(\frac{T_{benda}}{T_{Bumi}}\right)^2 = \left(\frac{R/2}{R}\right)^3$$

Waktu jatuh adalah $t = T_{benda}/2$. Sehingga:

$$t = \frac{T}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = \boxed{\textbf{65 hari}}$$